6.1.2005

תרגיל מס׳ 12 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

1. תהי G חבורה סופית. נניח שנתונה לנו טבלת הקרקטרים של G (מעל $\mathbf{C}$), כלומר ידוע שיש r מחלקות צמידות ב- G, שיסומנו $c_1,\dots,c_r$, ו- r קרקטרים $\chi_1,\dots,\chi_r$, וכל הערכים $\chi_i(c_j)$ ידועים. שימו לב: **איננו** יודעים את לוח הכפל של G.

א. יהי $g \in c_j$. הראו כי $|C_G(g)| = \sum_{i=1}^{r} |\chi_i(c_j)|^2$. הסיקו כי ניתן לחשב את הגודל של c_j מתוך טבלת הקרקטרים.

ב. הראו כיצד ניתן לקבוע אם G אבלית.

ג. הראו כיצד ניתן למצוא את שריג כל תת החבורות הנורמליות של G ואת הסדר שלהן.

הערה: בסעיף זה וביתר הסעיפים, ב״מציאת״ תת-חבורה נורמלית הכוונה היא לתאר אותה כאיחוד מחלקות צמידות.

ד. הראו כיצד לתאר את תת חבורת הקומוטטור G'.

ה. הראו כיצד לתאר את המרכז $Z(G)$.

ו. הראו כיצד לקבוע (בעזרת טבלת הקרקטרים) אם G נילפוטנטית.

2. הוכיחו את הטענות הבאות לגבי חבורות סופיות בעזרת ספירת מעלות של קרקטרים.

א. תהי G חבורה מסדר p^n כאשר p ראשוני ו- $n \geq 2$. אזי $[G:G'] \geq p^2$. בפרט, חבורה מסדר p^2 היא אבלית.

ב. חבורה מסדר pq ($p<q$ ראשוניים) אינה פשוטה.

ג. חבורה מסדר pq כאשר $p<q$ ראשוניים ו- p אינו מחלק את $q-1$ היא ציקלית.

3. בשאלה זו נכליל את המשפט לפיו המימד של הצגה אי פריקה מחלק את סדר החבורה.

א. יהיו G חבורה ו- $\rho: G \to GL(V)$ הצגה אי-פריקה. נקבע $n \geq 1$ ונתבונן בהצגה (מכפלה טנזורית חיצונית) $\rho^{\boxtimes n}: G^n \to GL(V^{\boxtimes n})$. הראו כי הצגה זו היא אי פריקה.

ב. נתבונן בתת החבורה $H = \{(z_1,\dots,z_n) \in G^n : z_i \in Z(G), z_1 \cdot \ldots \cdot z_n = 1\}$. הוכיחו כי לכל $h \in H$, $\rho^{\boxtimes n}(h)$ פועלת כזהות.

רמז: עבור $z \in Z(G)$, $\rho(z)$ פועלים כסקלרים.

ג. הראו כי $(\dim V)^n$ מחלק את $\frac{|G|^n}{|Z(G)|^{n-1}}$ לכל $n \geq 1$ (השתמשו במשפט).

ד. הסיקו כי $\dim V$ מחלק את $[G:Z(G)]$.