Prof. Dr. M. Rapoport
A. Mihatsch **SS 2016**

Algebra I

10. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Seien R, S zwei k-Algebren von endlichem Typ und sei $T = R \otimes_k S$ ihr Tensorprodukt (wieder eine k-Algebra).
i) Zeige, dass für die Krulldimension gilt, dass

$$\dim(T) \;=\; \dim(R) + \dim(S).$$

ii) Zeige weiterhin, dass

$$\dim(R[T]) \;=\; \dim(R) + 1 \quad \text{und} \quad \dim(R[T, T^{-1}]) \;=\; \dim(R) + 1.$$

Aufgabe 2:

a) Sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

i) Der Raum X ist irreduzibel.

ii) Sind U_1, U_2 nichtleere offene Teilmengen in X, so gilt $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.

iii) Jede nichtleere offene Teilmenge in X ist dicht.

b) Sei A ein Ring. Zeige, dass $\operatorname{Spec}(A)$ genau dann irreduzibel ist, wenn $\sqrt{0}$ ein Primideal ist.

Aufgabe 3:

Sei k ein Körper und R eine reduzierte k-Algebra von endlichem Typ. Betrachte den topologischen Raum $X = \operatorname{Spec} R$ und ein Element $f \in R$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

i) $D(f)$ ist dicht in X.

ii) f ist kein Nullteiler in R (d.h. für jedes $a \in R$ mit $a \neq 0$ gilt $fa \neq 0$).

iii) f ist in keinem minimalen Primideal von R enthalten.

Hinweis: Verwende für die Äquivalenz mit iii) folgenden Satz aus der ersten Vorlesungswoche. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \subset R$ Primideale und sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, sodass

$$\mathfrak{a} \subset \bigcup_{i=1,\ldots,n} \mathfrak{p}_i.$$

Dann gilt bereits $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ für ein i.

Aufgabe 4:

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

i) Seien f_1, f_2 und $f_3 \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Beweise, dass die Nullstellenmengen der Ideale $(f_1, f_2) \cap (f_1, f_3)$ und $(f_1, f_2 \cdot f_3)$ in $\mathbb{A}^n(k)$ übereinstimmen.

ii) Zeige, dass die Ideale $(X, Y) \cap (X, Z)$ und (X, YZ) von $k[X, Y, Z]$ übereinstimmen.

iii) Bestimme die irreduziblen Komponenten der Nullstellenmenge von $(X^2 - YZ, XZ - X) \subset k[X, Y, Z]$ durch Angabe ihrer Verschwindungsideale. Was sind also die minimalen Primideale des Rings
$$k[X, Y, Z]/(X^2 - YZ, XZ - X) \text{ ?}$$

Jede Aufgabe gibt 5 Punkte.

Abgabe: Montag, 27. Juni 2016.