Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2013**
T. Richarz

Algebra I

7. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei A ein Ring, und sei G eine endliche Gruppe, die auf A in Form von Ringautomorphismen operiert. Sei $A^G = \{a \in A \mid ga = a,\ \forall\, g \in G\}$ der Unterring der G-invarianten Elemente (vergleiche Blatt 6, Aufgabe 4). Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A^G)$, und sei $P = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{q} \cap A^G = \mathfrak{p}\}$. Zeige, dass G transitiv auf P operiert.

Aufgabe 2:

Sei A ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Sei L/K eine galoissche Erweiterung mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, und sei B der ganze Abschluss von A in L. Zeige, dass

i) $\sigma(B) = B$ für alle $\sigma \in G$.

ii) $B^G = A$.

Aufgabe 3:

Sei A ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich. Zeige, dass der Polynomring $A[X]$ ganzabgeschlossen ist.

Tip: Reduziere auf den Fall, dass A ein Körper ist.

Aufgabe 4:

Sei $A = \mathbb{Q}[X, Y]$, und betrachte das Hauptideal $\mathfrak{p} = (X^2 - Y^3)$. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, aber der Integritätsbereich $A/\mathfrak{p}$ nicht ganzabgeschlossen ist.

Abgabe: Donnerstag, 06. Juni 2013.