Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz **SS 2013**

Algebra I

12. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei A ein noetherscher Ring, und sei I ein echtes Ideal in A. Sei $\hat{A}$ die I-adische Komplettierung von A.

i) Für $x \in A$ bezeichne $\hat{x}$ das Bild in $\hat{A}$. Zeige, dass $\hat{x}$ kein Nullteiler ist, falls x kein Nullteiler ist.

ii) Gib ein Beispiel an, in dem A nullteilerfrei ist, aber seine Komplettierung $\hat{A}$ nicht.

Tip: Für Teil ii) betrachte den Ring $A = \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^2(1+X))$ und das von den Restklassen von X,Y erzeugte Maximalideal I in A. Zeige mithilfe der Taylorentwicklung, dass das Polynom $1+X$ eine Wurzel in $\mathbb{C}[\![X,Y]\!]$ besitzt.

Aufgabe 2:

Sei k ein Körper, und sei $f \in k[X,Y]$ ein Polynom, das als Polynom in Y normiert ist. Sei $a \in k$ eine einfache Nullstelle von $f(0,Y)$. Zeige, dass eine Potenzreihe $h \in k[\![X]\!]$ existiert, mit $f(X,h(X)) = 0$ und $h(0) = a$.

Tip: Hensels Lemma.

Aufgabe 3:

Sei A ein semilokaler Ring, d.h. A besitzt nur endlich viele Maximalideale. Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$ die Maximalideale von A, und sei $\mathfrak{a}$ das Jacobsonradikal. Sei $\hat{A}$ die Komplettierung von A bezüglich $\mathfrak{a}$, und sei $\hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ die Komplettierung von $A_{\mathfrak{m}_i}$ bezüglich $\mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i}$. Zeige, dass

$$\hat{A} \simeq \prod_{i=1}^{k} \hat{A}_{\mathfrak{m}_i}.$$

Tip: Der Ring $\hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ ist isomorph zur Komplettierung von A bezüglich $\mathfrak{m}_i$.

Aufgabe 4:

Sei k ein Körper, und sei A der Ring

$$A = k[X_i;\ i \in \mathbb{N}]/(X_i X_j;\ i,j \in \mathbb{N}).$$

Zeige, dass $A[\![T]\!]$ kein flacher A-Modul ist. Insbesondere ist $A[\![T]\!]$ kein flacher $A[T]$-Modul, d.h. die Komplettierung eines Rings ist im Allgemeinen nicht flach.

Tip: Betrachte das von der Restklasse von X_1 erzeugte Hauptideal in A.

Abgabe: Donnerstag, 11. Juli 2013.