Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz **SS 2013**

Algebra I

11. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) Sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

i) Der Raum X ist irreduzibel.

ii) Sind U_1, U_2 nichtleere offene Teilmengen in X, so gilt $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.

iii) Jede nichtleere offene Teilmenge in X ist dicht.

b) Sei A ein Ring. Zeige, dass $\mathrm{Spec}(A)$ genau dann irreduzibel ist, wenn $\sqrt{0}$ ein Primideal ist.

Aufgabe 2:

Sei A ein noetherscher Ring, und seien $I, J \subset A$ Ideale.

i) Falls A vollständig bezüglich der I-adischen und J-adischen Topologie ist, dann ist A auch vollständig bezüglich der $I + J$-adischen Topologie.

ii) Falls A vollständig bezüglich der I-adischen Topologie ist, und $J \subset I$ gilt, dann ist A auch vollständig bezüglich der J-adischen Topologie.

Aufgabe 3:

Sei k ein Körper, und sei $A = k[T_1, \ldots, T_n]$ der Polynomring in n Unbestimmten über k. Sei $I = (T_1, \ldots, T_n)$ das von $T_1, \ldots, T_n$ erzeugte Maximalideal. Zeige, dass die I-adische Komplettierung von A mit dem Potenzreihenring $k[[T_1, \ldots, T_n]]$ übereinstimmt.

Aufgabe 4:

Sei $\mathbb{Q}_p\{\{T\}\} = \mathbb{Z}_p[[T]] \otimes \mathbb{Q}_p$. Zeige, dass die $\mathbb{Q}_p$-Algebren $\mathbb{Q}_p\{\{T\}\}$ und $\mathbb{Q}_p[[T]]$ nicht isomorph sind. Folgere, dass Komplettieren im Allgemeinen nicht mit Lokalisieren vertauscht, und dass der lokalisierte Ring nicht notwendig vollständig ist.

Abgabe: Donnerstag, 04. Juli 2013.