Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz

Sommersemester 2013

Klausur zur Vorlesung Algebra I

13.07.2013

Name, Vorname	
Tutor	
Matrikelnr.	
Semester	
E-mail	

Zugelassene Hilfsmittel: Stift.

Hinweise:

(i) Bitte schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller in blauer oder schwarzer Farbe.

(ii) Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

(iii) Füllen Sie das Deckblatt bitte vollständig und lesbar aus.

(iv) Benutzen Sie nur Sätze und Aussagen aus der Vorlesung oder von den Übungszetteln.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
erreichbare Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Note:

Aufgabe 1: $(5+5)$
Sei A ein Ring, und sei $\mathrm{Nil}(A)$ das Nilradikal.
i) Zeige, dass ein $n \geq 0$ existiert mit

$$\mathrm{Nil}(A)^n \;=\; 0,$$

falls A noethersch ist.
ii) Gib ein Beispiel eines Ringes A an, in dem $\mathrm{Nil}(A)^n \neq 0$ für alle $n \geq 0$ gilt.

Aufgabe 2: $(5+5)$

Sei $k[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über einem Körper k.

i) Gib die abgeschlossenen Punkte von $\mathrm{Spec}(k[X])$ an.

ii) Gib die in der Zariski-Topologie abgeschlossenen Mengen von $\mathrm{Spec}(k[X])$ an, falls k algebraisch abgeschlossen ist.

Aufgabe 3: $(4 + 6)$

Sei A ein Ring, und sei M ein A-Modul.

i) Zeige, dass M flach über A ist, falls M frei ist.

ii) Gib ein Beispiel eines Ringes A und eines flachen Moduls M an, der nicht frei ist.

Aufgabe 4: $(2 + 3 + 3 + 2)$

Bestimme die Krulldimension der folgenden Ringe.

i) $\mathbb{Z}$;

ii) $k[X] \otimes_k k[X]$, k Körper;

iii) $k[X, Y]/(X^2 - Y^3)$;

iv) $\prod_{i=1}^{n} k$, k Körper, $n \geq 1$.

Aufgabe 5: $(4 + 2 + 4)$

Bestimme für folgende Ringerweiterungen $R \subset S$ den ganzen Abschluss von R in S.

i) $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Q}(i)$;

ii) $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, $S = k(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 1$, k ein Körper;

iii) $R = k[X, Y]/(X^2 - Y^3)$, $S = \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper.

Aufgabe 6: (10)

Sei A ein Ring, $I \subset A$ ein Ideal, und sei A vollständig und separiert bezüglich der I-adischen Topologie. Zeige, dass ein Element $a \in A$ genau dann eine Einheit ist, falls $a \mod I$ eine Einheit ist.