Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

SS 2004

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, Teil 6

Aufgabe 5

Sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein euklidischer Vektorraum, und sei $(f_i)_i \in I$ eine Familie von selbstadjungierten Endomorphismen von V, so dass $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ für alle $i, j \in I$.

Zeige, dass eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von V existiert, so dass alle v_ℓ Eigenvektoren von allen f_i, $i \in I$, sind.

Aufgabe 6

Sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 3} \in SO(3, \mathbb{R})$, und sei φ der Drehwinkel von A, $-\pi < \varphi \le \pi$. Zeige:

a) Es gilt $-1 \le \mathrm{Spur}(A) \le 3$ und $\frac{1}{2}(\mathrm{Spur}(A) - 1) = \cos\varphi$.

b) Jeder Vektor auf der Drehachse $V(1, A)$ wird von der schiefsymmetrischen Matrix $A - {}^tA$ annulliert. Falls $-1 < \mathrm{Spur}(A) < 3$, so ist

$$v = \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix}$$

ein von Null verschiedener Vektor auf der Drehachse.

c) Falls $\mathrm{Spur}(A) = -1$, so ist $A^2 = E_3$, und jeder Spaltenvektor der Matrix $E + A$ liegt auf der Drehachse, die gleich der Spiegelungsgeraden ist.

d) Ist $\mathrm{Spur}(A) = 3$, so ist $A = E_3$.

e) Wie muss man die obigen Aussagen und Formeln für $A \in O(3, \mathbb{R})$ mit $\det A = -1$ modifizieren?

Aufgabe 7

Berechne die Gleichungen der Hauptachsen und die Normalform der folgenden Quadrik:

$$160x^2 + 24xy + 153y^2 + 296x - 282y = 0.$$