# LE THEOREME DE RAGE

Dimitri COBB

Exposé donné le 14 juin 2019

Ce texte constitue quelques notes d'un court exposé donné à l'*ENS de Rennes* à l'occasion d'une journée de retrouvailles des élèves de quatrième année (M2). Son objet est de présenter de façon concise un résultat de théorie spectrale, le théorème de RAGE, ainsi qu'une de ses applications à l'analyse des équations de Navier-Stokes.

Le théorème de RAGE est dû à D. Ruelle (1969) et a été ensuite étoffé par W. Armein et V. Georgescu (1973) puis V. Enss (1979), toujours dans le cadre de l'étude mathématique de la mécanique quantique.

Ces notes se divisent en trois parties. La première regroupe quelques résultats essentiels sur la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints. La deuxième partie contient un énoncé et une démonstration du théorème de RAGE. Enfin, la troisième partie présente une application du théorème de RAGE à l'étude des équations de Navier-Stokes en rotation rapide.

Avant de commencer, soulignons le caractère lacunaire de ces notes. L'accent étant surtout porté sur le théorème de RAGE en lui-même, il a semblé opportun d'omettre certaines démonstrations ou certains arguments pour permettre au lecteur de situer plus rapidement le théorème et ses applications dans leurs contextes, en espérant que cela n'affectera pas la clarté de l'exposé. Quoiqu'il en soit, la bibliographie devrait permettre au lecteur curieux de retrouver toutes les preuves détaillées.

## 1 Opérateurs autoadjoints

De manière à rendre l'énoncé et la preuve du théorème de RAGE plus accessibles, nous regroupons dans cette section quelques notions de base sur la théorie des opérateurs autoadjoints (bornés) sur un espace de Hilbert. Tout le contenu de cette section est tiré de [6] (chapitre VII pp. 221-237), qui présente le sujet de façon très claire et beaucoup plus complète qu'ici.

Dans tout ce qui suit, $H$ est un espace de Hilbert complexe[1] et $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur autoadjoint continu.

Nous partons du constat que la composition des opérateurs permet de définir un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres :

$$\phi_1 : \begin{array}{c} \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ P \longmapsto P(A) \end{array} \tag{1}$$

[1]Le produit hermitien sur $H$ sera supposé linéaire *à droite* et semi-linéaire *à gauche*, par souci de cohérence avec les notations employées en mécanique quantique, où les vecteurs sont notés $|\psi\rangle$ et les formes linéaires $\langle\phi|$.
Le fait que $H$ soit complexe garantit que le spectre d'un opérateur continu est non vide, par exemple.

que l'on souhaite étendre en un morphisme d'algèbres sur un complété de $\mathbb{C}[X]$. Le bon choix pour cela est l'espace $C\big(\sigma(A)\big)$ des fonctions continues sur $\sigma(A)$, le spectre[2] de l'opérateur $A$.

**Théorème 1.** *Il existe un unique morphisme de $C^*$-algèbres[3] continu $\phi : C\big(\sigma(A)\big) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ prolongeant le morphisme $\phi_1$ défini ci-dessus.*

*De plus, ce morphisme $\phi$ a les propriétés suivantes :*

1. *Si $x \in H$ est un vecteur propre de $A$, $Ax = \lambda x$, alors $x$ est un vecteur propre de $\phi(f)$, $\phi(f)x = f(\lambda)x$,*
2. *Si $f \geq 0$ alors $\phi(f)$ est un opérateur positif, c'est à dire que $\langle \phi(f)x|x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$,*
3. *On a $\sigma\big(\phi(f)\big) = f\big(\sigma(A)\big)$,*
4. *Le morphisme $\phi$ est une isométrie : $\|\phi(f)\| = \|f\|_\infty$.*

*Eléments de démonstration.* Nous donnons les grandes lignes de la preuve, en renvoyant à [6] pp. 223-224 pour plus de détails. Pour étendre l'opérateur $\phi_1$ à $C\big(\sigma(A)\big)$, nous devons montrer que $\phi_1$ est continu pour la norme uniforme de $C\big(\sigma(A)\big)$.

**Etape 1 :** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors $\sigma\big(P(A)\big) = P\big(\sigma(A)\big) = \{P(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}$.

**Etape 2 :** On a $\|P(A)\| = \sup\{|P(\lambda)|, \lambda \in \sigma(A)\}$.

□

Puisque $\phi$ étend "l'évaluation" des polynômes en $A$, nous noterons toujours $\phi(f) = f(A)$ pour $f \in C\big(\sigma(A)\big)$.

Le morphisme $\phi$ est en particulier une application linéaire. Cela nous permet de définir, pour tout vecteur $x \in H$ une forme linéaire $T_x : C\big(\sigma(A)\big) \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\forall f \in C\big(\sigma(A)\big), \quad T_x f = \langle x|f(A)x\rangle. \tag{2}$$

Cette forme linéaire est continue et positive, en vertu du point *2.* dans le théorème 1, c'est à dire que $T_x f \geq 0$ dès que $f \geq 0$. Elle définit donc une mesure de Radon positive que nous notons $\mu_x$ et qui est nommée *mesure spectrale*. En d'autres termes,

$$\forall f \in C\big(\sigma(A)\big), \quad \langle x|f(A)x\rangle = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\mathrm{d}\mu_x(\lambda). \tag{3}$$

Cette mesure $\mu_x$ contient déjà certaines informations sur les propriétés du vecteur $x$. Par exemple, $x$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_0$ si et seulement si la mesure spectrale associée est une masse de Dirac $\mathrm{d}\mu_x(\lambda) = \|x\|^2\mathrm{d}\delta_{\lambda_0}(\lambda)$. En effet, si d'une part $Ax = \lambda_0 x$, le point *1.* du théorème 1 assure que $f(A)x = f(\lambda_0)x$ et

$$f(\lambda_0)\|x\|^2 = \langle x|f(A)x\rangle = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\mathrm{d}\mu_x(\lambda) \tag{4}$$

et donc on a bien $\mu_x = \|x\|^2\delta_{\lambda_0}$. Réciproquement, si $\mu_x = \|x\|^2\delta_{\lambda_0}$, en prenant $f(\lambda) = \lambda$ dans (3),

$$\langle x|\lambda_0 x\rangle = \|x\|^2 \int_{\sigma(A)} \lambda\mathrm{d}\delta_{\lambda_0}(\lambda) = \langle x|Ax\rangle \tag{5}$$

[2] Par ailleurs, comme $A$ est autoadjoint continu, son spectre est réel borné $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.
[3] C'est donc un morphisme unitaire tel que $\phi(\bar{f}) = \phi(f)^*$.

et on en déduit $Ax = \lambda_0 x$ par polarisation.

En fait, le théorème de décomposition des mesures de Radon-Nikodym-Lebesgue, qui dit que toute mesure ($\sigma$-)finie sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme somme de mesures ponctuelles[4] et d'une mesure continue[5], fournit, après quelques efforts, une décomposition de $H$

$$H = H_p \oplus H_c \tag{6}$$

où $H_p$ est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs dont la mesure spectrale est ponctuelle et $H_c$ celui engendré par les vecteurs dont la mesure spectrale est continue.

## 2 Le théorème de RAGE

La cadre naturel du théorème de RAGE est celui de la mécanique quantique. L'état d'un système quantique est décrit par un vecteur $\psi(t)$ dans un espace de Hilbert $H$, et son évolution dans le temps est dictée par la donnée d'un opérateur autoadjoint $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(H)$ (l'opérateur Hamiltonien) et l'équation de Schrödinger[6]

$$i\hbar\partial_t\psi = \mathcal{H}\psi \tag{7}$$

dont la solution prend la forme $\psi(t) = e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}}\psi(t=0)$. Dans ce qui suit, nous prenons $\hbar = 1$, ce qu'un bon choix d'unités permet de supposer.

Une question naturelle est de s'intéresser à l'évolution de la quantité $\langle\psi_0|e^{-i\mathcal{H}t}\psi_0\rangle$ dans le temps. Celle-ci est égale à la transformée de Fourier de la mesure spectrale $\mu_{\psi_0}$ associée à $\psi_0$ et $\mathcal{H}$

$$\langle\psi_0|e^{-i\mathcal{H}t}\psi_0\rangle = \int_{\sigma(\mathcal{H})} e^{-it\lambda}\mathrm{d}\mu_{\psi_0}(\lambda) = \hat{\mu}_{\psi_0}(t). \tag{8}$$

Un calcul simple, dû à Wiener (voir [7] section 5.2. pp. 150-151), montre que la moyenne temporelle de $|\hat{\mu}_{\psi_0}(t)|^2$ converge : le théorème de Fubini assure que

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\hat{\mu}_{\psi_0}(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \int_{\sigma(\mathcal{H})}\int_{\sigma(\mathcal{H})} \exp\Big(-i(\lambda_1-\lambda_2)t\Big)\,\mathrm{d}\mu_{\psi_0}(\lambda_1)\mathrm{d}\mu_{\psi_0}(\lambda_2) \tag{9}$$

$$= \int_{\sigma(\mathcal{H})}\int_{\sigma(\mathcal{H})} \left\{\frac{1}{T}\int_0^T \exp\Big(-i(\lambda_1-\lambda_2)t\Big)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\mu_{\psi_0}(\lambda_1)\mathrm{d}\mu_{\psi_0}(\lambda_2) \tag{10}$$

Et quand $T \to +\infty$, on dispose de la convergence simple

$$\frac{1}{T}\int_0^T \exp\Big(-i(\lambda_1-\lambda_2)t\Big)\mathrm{d}t \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{\lambda_1=\lambda_2} \tag{11}$$

[4] C'est à dire une somme dénombrable de masses de Dirac.

[5] C'est à dire une mesure sans atome : la mesure d'un singleton est toujours 0. Notons que cela ne signifie pas être absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.

[6] Pour une introduction très accessible à la mécanique quantique, le lecteur intéressé pourra consulter [4]. Pour aller plus loin, le livre [5] se distingue par la rigueur et la clarté de son exposé.

ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée (la mesure $\mu_\psi$ est finie) et de conclure

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\hat{\mu}_{\psi_0}(t)|^2 \mathrm{d}t \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\sigma(\mathcal{H})}\int_{\sigma(\mathcal{H})} \mathbb{1}_{\lambda_1=\lambda_2}\, \mathrm{d}\mu_{\psi_0}(\lambda_1)\mathrm{d}\mu_{\psi_0}(\lambda_2) \tag{12}$$

$$= \int_{\sigma(\mathcal{H})} \mu_{\psi_0}\{\lambda\}\mathrm{d}\mu_{\psi_0}(\lambda) = \sum_{\lambda\in\sigma(\mathcal{H})} \left|\mu_{\psi_0}\{\lambda\}\right|^2. \tag{13}$$

Nous voyons en particulier que si $\psi_0 \in H_c$, c'est à dire que $\psi_0$ est orthogonal à tout vecteur propre de $\mathcal{H}$, alors les moyennes de $\langle\psi_0|e^{-i\mathcal{H}t}\psi_0\rangle$ tendent vers 0 en temps grand. Une légère adaptation[7] de ce calcul montre que si $\psi_0 \in H_c$ alors la probabilité moyenne de trouver le système quantique dans n'importe quel état fixé $\phi \in H$ tend vers 0.

C'est dans cette optique que s'inscrit le théorème de RAGE, qui améliore le calcul que nous venons d'effectuer. La preuve que nous donnons est tirée de [2] théorème 5.8. pp.

**Théorème 2** (de RAGE)**.** *Soit $H$ un espace de* Hilbert*, $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint (continu) et $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint compact. On note $P_c : H \longrightarrow H_c$ la projection orthogonale associée à la décomposition* (6)*. Alors,*

$$\|Q(T)\| = \left\|\frac{1}{T}\int_0^T \exp(-itA)KP_c\exp(itA)\mathrm{d}t\right\| \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{14}$$

*Démonstration.* Commençons par simplifier le problème. Un opérateur compact **sur un espace de Hilbert** peut être approché, en norme d'opérateur, par des opérateurs de rangs finis. Cette propriété découle du fait que l'image de la boule unité fermée $B_H$ par l'opérateur compact $K$ est compacte, donc bien approchée par des espaces de dimension finie (voir [1] chapitre VI section 1 pp. 89-90). Soit en effet, $\epsilon > 0$ et $y_1, ..., y_m \in K(B_H)$ donnés par la propriété de Borel-Lebesgue

$$K(B_H) \subset \bigcup_{j=1}^m B(y_j, \epsilon). \tag{15}$$

On note $P$ la projection orthogonale sur le sous-espace de dimension **finie** $\mathrm{Vect}\{y_1, ..., y_m\}$. Alors l'opérateur $PK$ est de rang fini. Pour tout $x \in B_H$ il existe $y_j$ tel que $\|Kx - y_j\| \leq \epsilon$ et

$$\|Kx - PKx\| \leq \|Kx - y_j\| + \|y_j - PKx\| \leq \epsilon + \|P(y_j - Kx)\| \leq 2\epsilon, \tag{16}$$

$$\|K - PK\| \leq 2\epsilon. \tag{17}$$

Nous pouvons donc nous contenter de démontrer le théorème en supposant que $K$ est un opérateur de rang 1. Soit donc $a, b \in H$ tels que $Kx = \langle a|x\rangle b$ (et donc $K^*x = \langle b|x\rangle a$). Alors

$$Q(T) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{itA}KP_c e^{-itA}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \left\langle e^{itA}P_c a|\,.\,\right\rangle e^{itA}b\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

$$Q(T)^* = \frac{1}{T}\int_0^T e^{itA}P_c^* K^* e^{-itA}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \left\langle e^{itA}b|\,.\,\right\rangle e^{itA}P_c a\,\mathrm{d}t. \tag{19}$$

[7]Nous laissons ce calcul de coté puisque, bien qu'il ne soit pas difficile, il fasse apparaître les mesures spectrales *signées* $\mu_{xy}$ définies par la forme linéaire : $f \mapsto \langle y|f(A)x\rangle$. Nous renvoyons à [7] pour les détails.

Et donc

$$Q(T)Q(T)^*x = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \langle e^{isA}b|x\rangle \langle e^{itA}P_ca|e^{isA}P_ca\rangle\, e^{itA}b\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t. \tag{20}$$

L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ donne alors

$$\begin{aligned} \|Q(T)\|^2 = \|Q(T)Q(T)^*\| &\leq \|b\|^2\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \left|\left\langle e^{i(t-s)A}P_ca|P_ca\right\rangle\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &\leq \|b\|^2\left\{\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \left|\langle P_ca|e^{i(t-sA)}P_ca\rangle\right|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Soit $\mu$ la mesure spectrale associée à $A$ et au vecteur $P_ca$. La relation (3) et le théorème de convergence dominée donnent ($\mu$ est une mesure finie)

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \left|\langle P_ca|e^{i(t-sA)}P_ca\rangle\right|^2\mathrm{d}st = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \left|\int_{\sigma(A)}\exp\big(i(t-s)\lambda\big)\mathrm{d}\mu(\lambda)\right|^2\mathrm{d}st \tag{22}$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\int_{\sigma(A)}\int_{\sigma(A)}\exp\big(-i(t-s)(\lambda_1-\lambda_2)\big)\mathrm{d}\mu(\lambda_1)\mathrm{d}\mu(\lambda_2)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{23}$$

$$= \int_{\sigma(A)}\int_{\sigma(A)}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T e^{-it(\lambda_1-\lambda_2)}\mathrm{d}t\frac{1}{T}\int_0^T e^{is(\lambda_1-\lambda_2)}\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\mu(\lambda_1)\mathrm{d}\mu(\lambda_2) \tag{24}$$

$$\underset{T\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{\sigma(A)}\int_{\sigma(A)}\mathbb{1}_{\lambda_1=\lambda_2}\mathrm{d}\mu(\lambda_1)\mathrm{d}\mu(\lambda_2) = \sum_{\lambda\in\sigma(A)}|\mu\{\lambda\}|^2. \tag{25}$$

Et enfin, comme $P_ca \in H_c$, la mesure $\mu$ est continue. La dernière somme est donc nulle et la démonstration est terminée. □

*Remarque* 3. Le théorème de RAGE est vrai dans le cadre plus général des opérateurs non-bornés, la démonstration étant exactement la même. En revanche, il convient d'être beaucoup plus délicats pour traiter des opérateurs autoadjoints non-bornés, un certains nombre de problèmes apparaissent du fait qu'ils ne sont définis que sur une partie (dense) de $H$, ou que leur spectre n'est pas borné. Le chapitre VIII de [6] est consacré à ces problèmes.

Avant de terminer cette section, donnons un corollaire utile du théorème (nous renvoyons à [3], section 3.2. pour les détails).

Tout d'abord, si $K$ est de plus autoadjoint positif, le théorème de HILBERT-SCHMIDT permet de construire la racine $\sqrt{K}$, un opérateur autoadjoint compact positif dont le carré est $K$. Alors, pour $x \in H$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left\|\sqrt{K}\exp\big(itA\big)P_cx\right\|^2\mathrm{d}t \leq h(T)\|x\|^2 \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{26}$$

Ensuite, si $X \in L^2(0,T;H)$, pour tout $T > 0$ **fixé**,

$$\frac{1}{T^2}\left\|\sqrt{K}P_c\int_0^t\exp\left(i\frac{t-s}{\epsilon}A\right)X(s)\mathrm{d}x\right\|^2_{L^2_T(H)} \leq h(\epsilon)\|X\|^2_{L^2_T(H)}\underset{\epsilon\to0^+}{\longrightarrow} 0. \tag{27}$$

# 3 Fluides compressibles en rotation rapide

Dans cette dernière section, nous présentons une application du théorème de RAGE à l'analyse asymptotique d'une EDP menée par E. Feireisl, I Gallagher et A. Novotný en 2012 [3]. Comme nous souhaitons avant tout montrer comment le théorème de RAGE intervient naturellement dans ce cadre, nous nous satisfaisons d'une discussion peu rigoureuse en renvoyant le lecteur curieux à [3].

Nous considérons les équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible auxquelles nous ajoutons un terme de force de Coriolis :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \frac{1}{\epsilon} e^3 \times \rho u + \frac{1}{\epsilon^2}\nabla[\rho^2] = \nu \Delta u \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Quelques remarques sur ce système...

1. Les équations sont posées dans un domaine tri-dimensionnel $\Omega = ]0,1[\times\mathbb{R}^2$ et $e^3 = (0,0,1)$ est le troisième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Le système (28) est muni de conditions de bord de glissement (ou de Navier), qui représentent le fait que le fluide ne traverse pas le bord. Mais ces conditions de bord, bien qu'importantes, n'apparaîtront pas dans notre discussion rapide.

2. Nous avons pris un modèle un peu simplifié. D'une part, nous avons supposé une relation simple entre la pression et la densité $p = \rho^2$. D'autre part, nous avons simplifié le terme de viscosité. Aucune de ces modifications n'introduisent de difficulté, si ce n'est au niveau calculatoire. L'article [3] étudie le cas général, qui permet d'être plus réaliste au niveau de la physique.

3. Les coefficients $\frac{1}{\epsilon}$ et $\frac{1}{\epsilon^2}$ sont pris arbitrairement grands $\epsilon \to 0^+$. Cette approximation est pertinente pour les fluides géophysiques (évoluant sur de grandes échelles de temps et d'espace) dont la vitesse de déplacement est très faible par rapport à l'influence de la force de Coriolis.

4. Ce système est muni de conditions initiales pour $u$ et $\rho$. Nous supposons que $u(t=0) = u_0 \in L^2 \cap L^\infty$ et que $\rho(t=0)$ est une perturbation d'un état de densité constante $\rho(t=0) = 1 + \epsilon r_{0\epsilon}$, où la suite $(r_{0\epsilon})_{\epsilon>0}$ est bornée dans $L^2 \cap L^\infty$.

5. Cette dernière supposition, $\rho(t=0) = 1+\epsilon r_{0\epsilon}$, permet également d'écrire la densité comme une perturbation de l'état de densité constante $\rho_\epsilon(t,x) = 1 + \epsilon r_\epsilon(t,x)$. En particulier, le terme $\frac{1}{\epsilon^2}\nabla[\rho^2] = \frac{1}{\epsilon^2}\nabla[1 + 2\epsilon r_\epsilon + O(\epsilon^2)]$ est en fait d'ordre 1 en $\frac{1}{\epsilon}$.

L'objectif est de démontrer une forme de convergence des solutions $(u_\epsilon, \rho_\epsilon) \longrightarrow (\rho, u)$ et de décrire la dynamique de la limite par une EDP.

Nous considérons des solutions d'énergies finies, c'est à dire que la somme de l'énergie totale du système et de l'énergie dissipée par viscosité est finie : il existe $C > 0$ indépendante de $\epsilon$ telle que

$$\int \left\{ \frac{1}{2}\rho_\epsilon |u_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon}\left(\rho_\epsilon - 1\right)^2 \right\} \mathrm{d}x + \int_0^t \int |\nabla u_\epsilon|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \leq C. \tag{29}$$

Ces solutions d'énergies finies ont trois avantages notables. Premièrement, un théorème d'existence de telles solutions a été démontré. Ensuite, la relation (29) fournit des bornes uniformes (indépendantes de $\epsilon$) sur les solutions. Enfin, du coté psychologique, une solution "physiquement acceptable" se doit d'être d'énergie finie.

En utilisant (29), il est possible de montrer des bornes uniformes sur les solutions dans certains espaces de fonctions, et d'en déduire des convergences faibles dans ces espaces. Quitte à extraire une sous-suite, pour $\epsilon \to 0^+$,

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \qquad \text{et} \qquad r_\epsilon \rightharpoonup r. \tag{30}$$

Ensuite, en multipliant la première équation du système (28) par $\epsilon$ en en prenant la limite $\epsilon \to 0^+$, il vient (au moins formellement)

$$0 = e^3 \times \rho_\epsilon u_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\nabla[1 + 2\epsilon r_\epsilon + \epsilon^2 r_\epsilon^2] + \epsilon\Big\{\partial_t(\rho_\epsilon u_\epsilon) + \mathrm{div}(\rho_\epsilon u_\epsilon \otimes u_\epsilon) - \nu\Delta u_\epsilon\Big\} \tag{31}$$

$$\underset{\epsilon\to 0^+}{=} e^3 \times u_\epsilon + 2\nabla r_\epsilon + O(\epsilon). \tag{32}$$

Cette dernière relation est linéaire (à $O(\epsilon)$ près), si bien qu'il est possible de prendre la limite $\epsilon \to 0^+$ au sens des distributions sans plus de questions. De la même manière, en faisant $\epsilon \to 0^+$ dans la deuxième équation de (28), on obtient $\mathrm{div}(u) = 0$, d'où un premier système d'équations

$$\begin{cases} e^3 \times u + 2\nabla r = 0 \\ \mathrm{div}(u) = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Ce système nous permet tout de suite de voir que les limites $r$ et $u$ sont des fonctions de $(t, x_1, x_2)$ et que $u_3 \equiv 0$. Malheureusement, il ne décrit pas la dynamique asymptotique : le temps n'y intervient pas. Pour palier à ce problème, nous allons devoir prendre la limite $\epsilon \to 0^+$ dans toute l'équation (28) et pas seulement dans la partie singulière. La difficulté principale sera de traiter le terme de convection, non-linéaire, et de montrer une forme de convergence du produit $\rho_\epsilon u_\epsilon \otimes u_\epsilon \longrightarrow u \otimes u$. Nous cherchons donc une convergence **forte** $u_\epsilon \longrightarrow u$. Dans cette optique, nous posons $V_\epsilon = \rho_\epsilon u_\epsilon$ (dont nous allons montrer la convergence forte vers $u$) et définissons l'opérateur différentiel

$$L\begin{pmatrix} r \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{div}(V) \\ e^3 \times V + \nabla r \end{pmatrix}. \tag{34}$$

La première équation de (28) prend alors la forme suivante :

$$\partial_t \begin{pmatrix} r_\epsilon \\ V_\epsilon \end{pmatrix} + \frac{1}{\epsilon} L \begin{pmatrix} r_\epsilon \\ V_\epsilon \end{pmatrix} = F_\epsilon \tag{35}$$

où le second membre s'écrit $F_\epsilon = (0, f_\epsilon)$ avec

$$f_\epsilon = \nu\Delta u_\epsilon - \mathrm{div}(\rho_\epsilon u_\epsilon \otimes u_\epsilon) - \frac{1}{\epsilon^2}\nabla\left[(\rho_\epsilon - 1)^2\right] \tag{36}$$

et est borné dans un certain espace de fonctions (de régularité négative, mais cela n'a, pour nous, aucune importance particulière). La formule de Duhamel montre alors que

$$\begin{pmatrix} r_\epsilon \\ V_\epsilon \end{pmatrix} = \exp\left(\frac{-t}{\epsilon}L\right)\begin{pmatrix} r_{0\epsilon} \\ V_{0\epsilon} \end{pmatrix} + \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\epsilon}L\right)\begin{pmatrix} 0 \\ f_\epsilon(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s. \tag{37}$$

A ce stade, nous sommes confrontés à un problème majeur. L'opérateur $L$ est anti-hermitien, si bien que son spectre est imaginaire pur, et nous nous attendons à ce que le terme $\exp\big(-tL/\epsilon\big)$ introduise des ondes de haute fréquence dans les solutions, ce qui est un obstacle notoire à la convergence forte.

Et c'est ici que le théorème de RAGE nous vient en aide. En prenant la transformée de Fourier de (34), nous voyons que la seule valeur propre de $L$ est 0, si bien que la projection $P_c : H \longrightarrow H_c$ du théorème 2 (de RAGE) est en fait la projection sur l'orthogonal du noyau $\ker(L)$ ! La théorème de RAGE, sous la forme (27) montre alors que tous les membres de (37) s'effondrent sur $H_p = \ker(L)$ lorsque $\epsilon \to 0^+$

$$(38)\quad \begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T \int \left| P_c K_1 \begin{pmatrix} r_\epsilon \\ V_\epsilon \end{pmatrix} \right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}\int_0^T \left\| \sqrt{K} P_c \begin{pmatrix} r_\epsilon \\ V_\epsilon \end{pmatrix} \right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \left\| \sqrt{K} P_c \left\{ \exp\left(\frac{-t}{\epsilon} L\right) \begin{pmatrix} r_{0\epsilon} \\ V_{0\epsilon} \end{pmatrix} + \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\epsilon} L\right) \begin{pmatrix} 0 \\ f_\epsilon(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \right\} \right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \\ &\underset{\epsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

où $K_1$ est un opérateur de régularisation destiné à la fois à transformer $L$ en un opérateur continu sur $L^2$ et à fournir l'opérateur compact $K$ nécessaire à l'application du théorème de RAGE. On a donc

$$(39)\qquad \lim_{\epsilon \to 0^+} K_1 \begin{pmatrix} r_\epsilon \\ V_\epsilon \end{pmatrix} = \lim_{\epsilon \to 0^+} (I - P_c) K_1 \begin{pmatrix} r_\epsilon \\ V_\epsilon \end{pmatrix}.$$

En appliquant $(I - P_c)K_1$ à la formule de Duhamel (37), nous voyons que

$$(40)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(I - P_c) K_1 \begin{pmatrix} r_\epsilon \\ V_\epsilon \end{pmatrix} = (I - P_c) K_1 \left\{ \begin{pmatrix} r_{0\epsilon} \\ V_{0\epsilon} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ f_\epsilon(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \right\}$$

est borné dans un certain espace. Le théorème d'Ascoli fournit la convergence forte $V_\epsilon \approx u_\epsilon \longrightarrow u$.

Enfin, en prenant le rotationnel de la première équation du système (28) et en faisant $\epsilon \to 0^+$, nous obtenons les équations qui régissent la dynamique limite : d'une part les conditions de compatibilité

$$(41)\qquad u = u(x_1, x_2) = (u_1, u_2, 0), \qquad r = r(x_1, x_2),$$

$$(42)\qquad u = 2\nabla^\perp_{(x_1,x_2)} r, \qquad \mathrm{div}_{(x_1,x_2)}(u) = 0,$$

assorties de conditions initiales appropriées, et d'autre part l'équation quasi-géostrophique

$$(43)\qquad \partial_t \left( \frac{1}{2} r - \Delta r \right) + \nu \Delta^2 r = \nabla^\perp r \cdot \nabla \Delta r.$$

Il n'est pas évident *a priori* que l'EDP (43) constitue une amélioration par rapport au système (28). En fait, malgré son apparente complexité (l'équation est non-linéaire et d'ordre 4 en espace), l'équation quasi-géostrophique (43) a un avantage majeur par rapport au système initial : ses solutions sont **uniques** et **stables** (voir la section 4.2. de [3]), alors que le caractère bien posé des équations de NAVIER-STOKES est toujours un problème ouvert en 2019. Cela implique en particulier que les convergences (30) se font pour toute la suite $(r_\epsilon, u_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ et pas seulement pour une suite extraite.

## Références

[1] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Mathématiques appliquées pour la maîtrise, 2$^e$ tirage, Masson, Paris, 1987.

[2] H. L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch et B. Simon, *Schrödinger Operators, with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[3] E. Feireisl, I Gallagher et A. Novotný, *A Singular Limit for Compressible Rotating Fluids*, SIAM J. Math. Anal., vol. 44, No. 1, 2012, pp. 192-205

[4] C. Gougoussis et N. Poilvert, *Mes premiers pas en mécanique quantique*, Ellipses, Paris, 2007.

[5] K. Hannabuss, *An Introduction to Quantum Theory*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 1, Oxford Science Publications, Oxford, 1997.

[6] M. Reed et B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. 1 Functional Analysis (revised and enlarged edition), Academic Press, London, 1980.

[7] G. Teschl, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics, with Applications to Schrödinger Operators*, 2$^e$ édition, Graduate Studies in Mathematics 157, American Mathematical Society, Providence, USA, 2014.