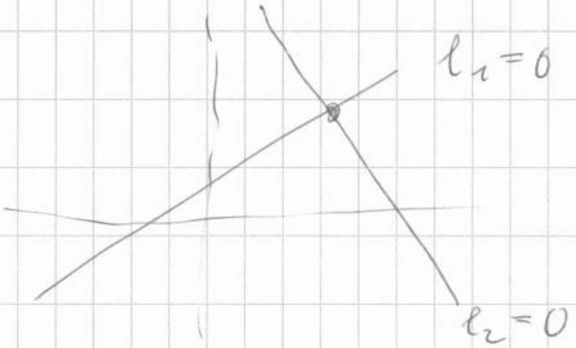
§3. Lineare Gleichungen u lineare Abbildungen

0) Schulunterricht: 2 Gleichungen 2 Unbekannte.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_1 = 0 \qquad l_1 = 0$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + b_2 = 0 \qquad l_2 = 0$$

„graphische Lösung" Schnittpkt 2-er Gerade = Lösung



Vorteil: der unlösbare Fall mitbehandelt: l_2 parallel zu l_1:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_1 = 0$$
$$2a_{11} x_1 + 2a_{12} x_2 + b_1 = 0 \ , \ b_1 \neq 0$$

3 Gleichungen mit 3 Unbekannten:
Schnitte von 3 Ebenen im Raum – alle möglichen Fälle elementar diskutierbar

Bemerkg: effektive Lsg NICHT graphisch – ungenau!

zurück zum einfachen Fall (im Schulunterricht!)

(L) $\qquad y = ax$

lin. Abb. $\quad x \longmapsto ax \quad$ von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Graph $\equiv$ Gerade

Grundaufgaben:

a) löse! $\qquad \leadsto \quad x = y a^{-1}$

b) Aus zwei Werten x_1, y_1 bestimme a

$\qquad a = y x^{-1}$

„Dreisatz"

„Schulunterricht darüber"

n Gleichungen mit n Unbekannten

(L) $\qquad \mathfrak{y} = A \mathfrak{x} \qquad \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

A invertierbar. Grundaufgaben:

a) Löse: $\quad \mathfrak{x} = A^{-1} \mathfrak{y}$

b) Aus n lin. unabh. $\mathfrak{x}_j$ und zugehörigen $\mathfrak{y}_j$ bestimme A

(„verallgemeinerter Dreisatz")

$A x_j = y_j$ $\qquad j = 1 \dots n$

$\qquad\qquad x_j$ l.u.

$\mathfrak{X} = (x_1 \dots x_n)$ $\qquad \mathfrak{Y} = (y_1 \dots y_n)$

invertierbar!

$$A\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$$

$$A = \mathfrak{Y}\cdot\mathfrak{X}^{-1}$$

Bemerkung. Bestimmung der inversen Matrix muß geschickt erfolgen – Programm.

Frage in Schulunterricht: Problem b) für $n=2$ – Anwendungen?

Bemerkung. Natürlich kann $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen Körper ersetzt werden.

(1) Allgemeines Problem ~~der~~ linearer Gl.-Systeme

K Körper

$A \in K^{m\times n}$ $\qquad \underline{b} \in K^m$

$(L_{\underline{b}})$: $\qquad Ax = \underline{b}$

$(L_{\underline{0}})$: $\qquad Ax = 0$

<u>Hauptsatz</u> über lineare Gleichungssysteme

i) Die Menge der Lösungen von

$$(L_0) \qquad A\mathfrak{x} = 0$$

bildet einen $n-r$-dim Unterraum $V_0 \subset K^n$, mit $r = \operatorname{rg} A$

ii) Für $\underline{b} \in K^m$ ist die Lösungsmenge $V_{\underline{b}}$ von

$$(L_{\underline{b}}) \qquad A\mathfrak{x} = \underline{b}$$

leer oder ein affiner Unterraum von K^n zu V_0:

$$V_{\underline{b}} = \begin{cases} \emptyset \\ \mathfrak{a} + V_0 \end{cases}$$

$\mathfrak{a}$ eine beliebige Lsg von $L_{\underline{b}}$.

iii) Die $\underline{b} \in K^m$ mit $V_{\underline{b}} \neq \emptyset$ sind ein r-dim Unterraum $W \subset K^m$. Genau dann ist $L_{\underline{b}}$ lösbar, wenn für jede Lsg $\mathfrak{y}$ des homogenen Systems

$$^tA\,\mathfrak{y} = 0$$

gilt: $\;{}^t\underline{b}\,\mathfrak{y} = 0.$

Bemerkungen i) $\operatorname{rg} A$ = # lin unabh. Spalten
= # —— Zeilen
= $\operatorname{rg} {}^tA$ „transponiert"

ii) W wird von den Spalten von A erzeugt:

$$A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n) \qquad \alpha_\mu \in K^m$$
$$\leadsto\ A 1\!\!1_\mu = \alpha_\mu \qquad 1\!\!1_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$$

also $\dim W = r$

iii) Je größer r, desto „kleiner" V_0

iv) Je 2 Lösungen von $V_{\underline{b}}$ unterscheiden sich um eine Lsg von $V_{\underline{0}}$

v) Wir beweisen Aussage (iii)

a) Es sei $\underline{b} \in W$, also $\underline{b} = A\underline{x}$.

$\leadsto$
$${}^t\underline{b} = {}^t\underline{x}\,{}^tA.$$
$$\leadsto\quad {}^t\underline{b}\,\underline{y} = {}^t\underline{x}\,{}^tA\,\underline{y}$$

also, für ${}^tA\underline{y} = 0$, $\quad = 0$.

Damit ist die Bedingung notwendig

b) „hinreichend". Wir wissen: $\dim W = r$. Die Dim des Lr von ${}^*V_0 \subset K^m$

$$ {}^t\!A\, y = 0 $$

ist $m - r$. Sei a_μ, $\mu = 1 \dots m-r$ Basis. Ist dann ${}^t b\, y = 0$ für alle $y \in {}^*V_0$, so ist

$$ \cancel{{}^t b\, y}\ {}^t b\, a_\mu = 0, \qquad \mu = 1 \dots m-r. $$

D.h. ${}^t b$ löst Gleichungssystem mit Koeff matrix vom Rang $m-r$, der Lösungsraum hat also die Dim $m - (m-r) = r$, stimmt demnach mit W überein.

<u>Zusatz</u>. Es sei $K = \mathbb{C}$, $\langle x, y \rangle = \sum x_i \bar{y}_i$. Dann lautet die Bedingung für

$$ A x = \underline{b} $$

lösbar $\Leftrightarrow$ $\langle \underline{b}, y \rangle = 0$ für alle y mit ${}^t\bar{A}\, y = 0$.

(2) Besseres Verständnis dieser Ergebnisse

$\cancel{f : V_n \longrightarrow W_m \text{ linear}}$

~~K VRe der Dim. n, m~~

V, W K-VRe , $f : V \to W$ linear

Suche Informationen über

$\text{Kern } f \quad \to V_0$
$\text{Bild } f$
$f^{-1}(y),\ y \in W$ „Fasern"

Immer:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset \\ x_0 + V_0 \end{cases}$$

Nun seien $\underset{n}{V}, \underset{m}{W}$ endlich-dimensional.

„Gleichungsproblem": Bestimme $f^{-1}(y)$

<u>Def</u> 1 $\quad \operatorname{rg} f = \dim \text{Bild } f$

<u>Satz</u> 2 $\quad \dim \text{Ker} f = n - \operatorname{rg} f$

(entspricht u Hauptsatz Aussage (i))

Nun sien V^*, W^* die Dualräume,
$f^* : W^* \to V^*$ duale Abbildung.

Erinnerung: „Dualraum ..."

Satz 3 i) $\dim V^* = \dim V$

ii) $\operatorname{rg} f^* = \operatorname{rg} f$

Beweisandeutung von ii): Zeige: $(\text{Bild} f)^* \cong \text{Bild} f^*$

Lemma 4. $U^* < V^*$ Unterraum. Setze

$$U^\perp = \{x \in V : u^*(x) = 0 \text{ für alle } u^* \in U^*\} < V.$$

Dann ist

$$\dim U^\perp = n - \dim U^*$$

Beweis $U^\perp \cong (V^*/U^*)^*$

Schreibweise: ~~$\langle x^*(x) \rangle$~~ $x^*(x) = \langle x, x^* \rangle$.

$$\langle f(x), y^* \rangle = \langle x, f^*(y^*) \rangle.$$

Dann: $y \in \text{Bild} f$, $y^* \in \operatorname{Ker} f^*$,

$$\langle y, y^* \rangle = \langle f(x), y^* \rangle = \langle x, f^*(y^*) \rangle = 0,$$

also $\operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f^*)^\perp$.

dimensionen sind gleich (Satz 3, 4)

Satz 5 $\text{Bild} f = (\operatorname{Ker} f^*)^\perp$.

Das ist wieder der Hauptsatz i – iii über lineare Gleichungen: setze $V = K^n$, $W = K^m$,

$f(x) = Ax$ und $V^* = K^n$ mit

$$\langle x, y^* \rangle = {}^t x \cdot y.$$